

Série - Révision.

Exercice 1: Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer A^n .

Exercice 2: On considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 défini par: $f(x, y, z) = (2x + y + z, -x - z, x + y + 2z)$

a/ Donner la matrice A de f relativement à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de \mathbb{R}^3 .

b/ Soit $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ une nouvelle base de \mathbb{R}^3 définie par:

$$e'_1 = -e_1 + e_2 \quad e'_2 = -e_1 + e_3 \quad e'_3 = e_1 - e_2 - e_3$$

1/ Déterminer la matrice de passage P de B à B' et la matrice de passage de B' à B (P^{-1})

2/ En déduire la matrice A' de f , relativement à la base B' . $A' = P^{-1} A P$

Exercice 3: Calculer les déterminants suivants:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 12 & 3 & 3/2 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a+i\alpha & \alpha+ia & a+\alpha \\ b+i\beta & \beta+ib & b+\beta \\ c+i\gamma & \gamma+ic & c+\gamma \end{vmatrix}$$

Exercice 4: Calculer l'inverse des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} i & 2 & -3 \\ 0 & i & 2 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5: Soit g l'endomorphisme de \mathbb{C}^3 défini par sa matrice relativement canonique de \mathbb{C}^3 et notée B

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de associés à g .
- Existe-t-il une base de \mathbb{C}^3 formée de vecteurs propres?
- Calculer $(B - 5I_3)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire B^n .

Exercice 6:

2/ Déterminer le polynôme caractéristique et chercher les valeurs propres et les sous-espaces propres associés en donnant leur bases, des endomorphismes suivants dont les matrices relativement aux bases canoniques sont :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- 2/ Dans chaque cas, dire s'il existe une base de l'espace formée de vecteurs propres. Dans le cas affirmatif, donner la matrice de l'endomorphisme relativement à cette nouvelle base.

$$I^2 = I$$

Série - Révision - Corrigé

JTC/SMP - Algèbre S2

Ex 1. Soit A une matrice diagonale

$$Ex 1. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I + J \text{ avec } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = 0$. On a

$$A^n = \sum_{k=0}^n C_n^k J^k (2I)^{n-k} = 2^n I + C_n^1 2^{n-1} J + C_n^2 2^{n-2} J^2 \text{ d'où}$$

$$I^{n-1} = I^{n-2} \cdot I = \frac{I^2}{I^1} = I$$

$$I^{n-2} = I^{n-3} \cdot I^2 = \frac{I^3}{I^1} = I$$

$$C_n^1 = \frac{n}{1} = n$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}, n \geq 2$$

$$Ex 2. f(e_1) = f((1, 0, 0)) = (2, 1, 1); f(e_2) = (1, 0, 1); f(e_3) = (1, -1, 2)$$

$$a) M(f, B) = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b) P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{cases} e_1 = -e'_1 - e'_2 - e'_3 \\ e_2 = -e'_1 - e'_3 \\ e_3 = -e'_1 - e'_3 \end{cases}, \text{ d'où } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2) A' = M(f, B') = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Ex 3. \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1+L_2} \begin{vmatrix} -2 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3+L_2} \begin{vmatrix} -2 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -7$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 12 & 3 & 3/2 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2-2C_1, C_3-C_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12 & -1 & -1/2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_4-C_1} \begin{vmatrix} a & b & c & 1-a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-a \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_4-C_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-a \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a+b+c-1$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a+\alpha & \alpha+ia & a+\alpha \\ b+\beta & \beta+ib & b+\beta \\ c+i\gamma & \gamma+ic & c+i\gamma \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1-C_3, C_2-C_3} \begin{vmatrix} (i-1)\alpha & (i-1)a & a+\alpha \\ (i-1)\beta & (i-1)b & b+\beta \\ (i-1)\gamma & (i-1)c & c+i\gamma \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_3} \begin{vmatrix} a+\alpha & a & a+\alpha \\ b+\beta & b & b+\beta \\ c+i\gamma & c & c+i\gamma \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1-C_2} \begin{vmatrix} \alpha & a & a+\alpha \\ \beta & b & b+\beta \\ \gamma & c & c+i\gamma \end{vmatrix} = 0$$



Ex 4

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = ix + 2y - 3z \\ y' = iy + 2z \\ z' = iz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -iz \\ y = -iy + 2z \\ x = -ix + 2y + (3-4i)z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 2 & 3-4i \\ 0 & -i & -2 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \text{Donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} -i & 2 & 3-4i \\ 0 & -i & -2 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

Pour B, la même chose. On trouve $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Ex 5 ① $\det(B - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^3$ Donc g admet

une valeur propre unique $\lambda = 5$. Pour déterminer le sous-espace propre associé on résout le système $(B - 5I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow y = z = 0$. Sa dimension est 1.

② On en déduit qu'il n'y a pas de bases formées uniquement de vecteurs propres.

③ $(B - 5I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $(B - 5I_3)^m = 0$ pour $m \geq 3$.
 $B = 5I_3 + J$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $B^n = 5^n I_3 + 5^n \binom{n}{1} J + 5^n \binom{n}{2} J^2$.
Donc: $B^n = \begin{pmatrix} 5^n & n5^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} 5^{n-2} \\ 0 & 5^n & n5^{n-1} \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}$.

Ex 6 ① $P_{A_1} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$

On suppose que $K = \mathbb{R}$.

A_1 n'admet pas de val prop. dans \mathbb{R} .

② $P_{A_2} = (1-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda)$. A_2 admet 3 val prop distincts. Donc A_2 est diagonalisable.

③ $P_{A_3} = (4-\lambda)^2(1-\lambda)$. le sous-espace propre associé à $\lambda=4$ est de dimension 1. Donc A_3 non diagonalisable.

④ $P_{A_4} = (2-\lambda)^3$. le sous-espace propre associé à $\lambda=2$ est de dimension 1. Donc A_4 n'est pas diagonalisable.



ETUSUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Informatique
Optique
Chimie
Diapo
Algèbre
Corrigés
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..